Universidade de São Paulo
Instituto de Física de São Carlos

Gabriel dos Reis Trindade

Uma introdução ao fluxo de Ricci em superfícies

São Carlos
2021

Gabriel dos Reis Trindade

Uma introdução ao fluxo de Ricci em superfícies

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Graduação no Instituto de Física de São Carlos da Universidade de São Paulo, como requisito para a obtenção do título de *Bacharel em Física.*

São Carlos
2021

Trindade, Gabriel dos Reis
Uma introdução ao fluxo de Ricci em superfícies / Gabriel dos Reis Trindade; orientador Carlos Henrique Grossi Ferreira -- São Carlos, 2021.
36 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Física) -- Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Curvatura. 2. Fluxo de Ricci. 3. Geometria riemanniana. 4. Sólitons de Ricci. I. Ferreira, Carlos Henrique Grossi, orient. II. Título.

Resumo

Introduzido por Richard Hamilton, o fluxo de Ricci consiste em um fluxo geométrico em variedades riemannianas que deforma a métrica do espaço através de uma equação diferencial parcial, tornando-a mais “regular”. Utilizado para provar a Conjectura de Poincaré, sua versão bidimensional não desenvolve singularidade quando o volume da superfície compacta é mantido constante, caracterizando o chamado fluxo de Ricci normalizado. Nesse caso, soluções específicas dele, chamadas de sólitons de Ricci gradiente, fornecem uma maneira de provar que a equação que o rege deforma a métrica a fim de a deixar mais simétrica. Isso significa que a métrica é deformada conformemente a uma de curvatura constante, dialogando, assim, como o célebre Teorema da Uniformização, que consiste em um resultado que caracteriza superfícies compactas via modelos de geometria de curvatura constante.

Palavra-chave: Curvatura. Fluxo de Ricci. Geometria riemanniana. Sólitons de Ricci.

Sumário

1 Introdução

Constituindo um dos sete problemas do milênio compilados pelo Instituto de Matemática Clay em 2000,[1] a Conjectura de Poincaré foi proposta pelo matemático Henri Poincaré no início do século XX[2] e instigou diversos estudiosos da área a se empenharem para a demonstrar. Como é possível verificar em seu enunciado, representado abaixo, essa conjectura apresenta noções fortemente topológicas, o que, historicamente, produziu diversos avanços no campo da topologia em vista de que eles colaborassem para a sua prova.[3]

Teorema 1.1 (Conjectura de Poincaré)**.** [4] *Qualquer variedade suave fechada e simplesmente conexa de dimensão três é difeomorfa a uma esfera tridimensional.*

Entre os ilustres nomes que se aventuraram em demonstrar (1.1) está o do matemático Richard Hamilton, esse, que propôs, por volta de 1982,[3] uma abordagem dinâmica para a evolução da curvatura, descobrindo, desse modo, o fluxo de Ricci. É fato que Hamilton não fez uma escolha arbitrária de equação, mas seguiu motivações análogas às que levaram Albert Einstein a incluir o tensor de Ricci em sua teoria da gravitação: a necessidade de utilizar um tensor de *rank* 2 simétrico com origem na métrica e em suas derivadas.[3] Na busca por esse fluxo, Hamilton institui a equação que o rege como $\frac{\partial}{\partial t}g = -2Ric(g)$, onde g é uma métrica riemanniana em uma variedade e Ric é seu tensor de curvatura de Ricci de g.[4] Sendo, em certo sentido, uma generalização não-linear da equação do calor,[3] a estratégia de aplicar esse fluxo para provar (1.1) consistia, *a priori*, em esperar que a curvatura da variedade nas hipóteses da conjectura chegasse cada vez mais próxima de um "equilíbrio térmico de curvaturas", ou seja, se tornasse gradativamente uniforme, de maneira que o teorema abaixo fosse passível de ser utilizado, completando a demonstração.[5]

Teorema 1.2 (Teorema da esfera de Rauch-Klingenberg-Berger)**.** [6] *Se uma variedade riemanniana completa e simplesmente conexa possui curvatura seccional $\mathcal{K} \in \left(\frac{1}{4}, 1\right]$, então ela é uma esfera.*

Devido à formação de singularidades na versão tridimensional desse fluxo, coube a Grigori Perelman completar a demonstração de (1.1),[3] fato ocorrido no início do século XXI.[1] Assim, historicamente, o fluxo de Ricci mostra-se como uma ferramente de importância inegável tanto no campo da geometria diferencial quanto para além dele. Segundo

Terence Tao, ganhador da Medalha Fields, esse fluxo pode ser entendido como uma maneira de “suavizar” a geometria de uma variedade riemanniana arbitrária com o intuito de a tornar mais simétrica.[7] No caso bidimensional, essa simetrização pode ser traduzida em um caminho para demonstrar o Teorema da Uniformização, um resultado classificatório para superfícies riemannianas dentro de hipóteses específicas. Neste trabalho, focaremos no estudo de resultados básicos do fluxo de Ricci, buscando elucidar os meios pelos quais o teorema abaixo pode ser provado, explicando as dificuldades de o demonstrar e abordando algumas ferramentas específicas utilizadas nesse processo.

Teorema 1.3. [4] *Se (M^2, g_0) é uma superfície riemanniana fechada, então existe uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= (r - S) g(t) \\ g(0) &= g_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ela existe para todo tempo e, conforme $t \to \infty$, as métricas $g(t)$ convergem uniformemente em qualquer C^k-norma para uma métrica suave g_∞ de curvatura constante.

Observação 1. *No desenvolvimento deste trabalho, optamos por uma abordagem didática específica, fornecendo algumas bases de geometria riemanniana em detrimento das demonstrações dos resultados aqui presentes sobre o fluxo de Ricci, com exceção de um, cuja motivação para manter sua prova ficará clara. Contudo, a fim de não deixar o leitor desassistido quanto à demonstração dos resultados, indicamos, nas notas de rodapé, fontes que a contém quando a referência utilizada não a possuir. Além disso, este trabalho baseia-se em um estudo do capítulo 5 da obra “The Ricci Flow: An Introduction”,[4] dos autores Bennett Chow e Dan Knopf.*

Observação 2. *Toda vez que nos referirmos a variedades, elas serão suaves, orientáveis e sem bordo, o que é válido, inclusive, para superfícies, cujo adjetivo “riemanniana” sempre será omitido. Além disso, suprimiremos o termo “suave” ao falarmos de campos de vetores e de campos de tensores, uma vez que todos os campos apresentados neste trabalho possuem esse atributo. Ao tratarmos de tensores, utilizaremos a convenção da soma de Einstein. Por fim, utilizaremos a notação $\mathfrak{X}(M^n)$ e ∂_i para representar, respectivamente, o* *conjunto dos campos de vetores suaves em* M^n *e os campos canônicos locais em* M^n*. As demais notações estarão especificadas quando aparecerem.*

2 Conceitos de geometria riemanniana

É fato que a abordagem mais natural para fluxo de Ricci vem através de ferramentas que partem da geometria riemanniana. Nesse sentido, faz-se apropriado fornecermos definições e resultados dessa área. Assim, comecemos nosso estudo, efetivamente, definindo o que é uma métrica riemanniana em uma variedade.

Definição 2.1. [8] *Seja M^n variedade. Uma métrica riemanniana em M^n é um campo covariante 2-tensorial g de M^n tal que, $\forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$ e $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, as condições abaixo são satisfeitas.*

1. *(Simetria) $g(X, Y) = g(Y, X)$;*

2. *(Bilinearidade) $g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z)$*

3. *(Ser positivo-definida) $g(X, X) > 0$ se $X \neq 0$ e $g(X, X) = 0$ se, e só se, $X = 0$.*

Além disso, uma variedade M^n munida de uma métrica g é chamada de variedade riemanniana, que denotamos por[1] (M^n, g).

A métrica g pode ser escrita nas cartas da variedade. Nesse caso, dado $\{E_i\}$ referencial local para o fibrado tangente TM^n, g se escreve localmente como $g = g_{ij} du^i du^j$, onde $du^i du^j := \frac{1}{2}(du^i \otimes du^j + du^j \otimes du^i)$ e $g_{ij} = g(E_i, E_j)$.[8]

Posto isso, podemos entender, sumariamente, uma métrica riemanniana como um produto interno em cada espaço tangente de uma variedade, produto esse que varia suavemente conforme o espaço tangente é variado de forma suave. *A priori*, esse campo tensorial pode não existir para uma dada variedade, contudo, a estrutura suave dela é suficiente para garantir essa existência, de maneira que toda variedade admite métrica riemanniana.[8] Desse modo, se (M^n, g) é variedade riemanniana e $\iota : \widetilde{M}^m \hookrightarrow M^n$ é subvariedade imersa de M^n, então $\widetilde{g} = \iota^* g$ é métrica em $\widetilde{M}^m$, que chamamos de métrica induzida em $\widetilde{M}^m$.[8] Além disso, uma métrica g em uma variedade riemanniana M^n define, também, uma métrica em cada $T^k_l M^n$ fibrado $\binom{k}{l}$-tensorial, métrica essa que igualmente denotaremos por

[1] Quando não há confusão, é comum representar g através da notação para forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou simplesmente por $\cdot$. Aqui, quando não houver possibilidade de equívoco, iremos omitir a métrica ao nos referirmos a variedades riemannianas.

g e que consiste em um produto interno em cada fibra $T^k_l(T_pM^n)$ de $T^k_lM^n$, onde[2] $p \in M^n$. Essa métrica, como é esperado, tem a propriedade de variar de forma suave conforme o ponto base varia suavemente e, se (E_i) é base ortonormal para T_pM^n com respectiva base dual (φ^i), então os tensores dados por $E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_l} \otimes \varphi^{i_1} \otimes \varphi^{i_k}$ formam base ortonormal para o espaço dos $\binom{k}{l}$-tensores em p.[8]

Outrossim, um dos conceitos de geometria riemanniana que frequentemente irá aparecer neste trabalho é o de métricas conformes. Precisamente, duas métricas g_1, g_2 em uma variedade M^n são ditas conformes uma a outra se existe função suave e positiva $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que $g_2 = fg_1$.[8] Desse modo, a positividade de f torna conveniente que ela seja escrita como uma exponencial e^u de uma segunda função u suave na variedade.

Ademais, como as métricas fornecem-nos uma maneira de generalizar projeções de vetores que pertencem ao mesmo espaço tangente, somos impelidos a pensar em uma maneira de derivar campos de vetores um na direção de outro e é nesse contexto que surgem as chamadas conexões lineares.

Definição 2.2. [8] *Seja M^n variedade. Uma conexão linear em M^n é um mapa $\nabla : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\nabla_X Y$ é C^∞-linear sobre funções suaves em X:*

$$\nabla_{fX_1+gX_2}Y = f\nabla_{X_1}Y + g\nabla_{X_2}Y \;\forall\, f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\; \forall\, X_1, X_2, Y \in \mathfrak{X}(M^n);$$

2. *$\nabla_X Y$ é linear sobre $\mathbb{R}$ em Y:*

$$\nabla_X(aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \;\forall\, a, b \in \mathbb{R},\; \forall\, X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M^n);$$

3. *∇ satisfaz a seguinte regra de Leibniz:*

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y \;\forall\, f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),\; \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M^n).$$

A operação $\nabla_X Y$ é chamada de derivada covariante de Y na direção de X. Assim, se

[2] O fato de usarmos a mesma notação tanto para a métrica na variedade base quanto para a métrica no fibrado justifica-se devido a essa última ser unicamente definida pela primeira.

é M^n variedade de dimensão n e $\{E_i\}$ é um referencial local para TM^n em algum aberto $U \subset M^n$, podemos expressar a derivada covariante de E_j na direção de E_i nesse referencial como $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k$, onde as n^3 funções Γ^k_{ij} são chamadas de símbolos de Christoffel de ∇ com respeito a $\{E_i\}$. Esses símbolos nos fornecem uma maneira de calcularmos, localmente, a derivada covariante de dois campos de vetores, conforme está expresso abaixo para $\{E_i\} = \{\partial_i\}$:

$$\nabla_X Y = (X^i \partial_i Y^k + X^i Y^j \Gamma^k_{ij})\partial_k. \quad (2)$$

[8]

Então, via expressão local da conexão e em um paralelo com a nomenclatura tensorial, podemos definir, também, o operador derivada contravariante, dado por $\nabla^j := g^{ji}\nabla_i$, onde $\nabla_i = \nabla_{\partial_i}$.[9] Além disso, como toda variedade admite conexão linear (o que pode ser provado tomando uma cobertura para ela e considerando uma partição da unidade subordinada a essa cobertura),[8] somos capazes de buscar aquela que, em um certo sentido, melhor se adequa à estrutura da variedade. Sob tal consideração, a formalização dessa "adequação" à estrutura do espaço nos é fornecida pela definição subsequente.

Definição 2.3. [8] *Sejam (M^n, g) variedade riemanniana e ∇ conexão linear em M^n. ∇ é compatível com a métrica g se $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Além disso, ∇ é dita ser simétrica se $\tau(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0,\ \forall\ X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, onde τ é chamado tensor de torção de ∇.*

Colocado isso, *a priori*, tal conexão pode não existir, contudo, ela não só existe, como também é única, surgindo da própria estruturação da variedade. Esse resultado tem tamanha importância na geometria que ele recebe o nome de "*Lema Fundamental da Geometria Riemanniana*".

Teorema 2.1 (Lema Fundamental da Geometria Riemanniana)**.** [8] *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana. Existe uma única conexão linear ∇ em M^n que é compatível com g e é simétrica. ∇ é chamada conexão de Levi-Civita em M^n com respeito à*[3] *g.*

Ademais, devido ao fato de fibrados vetoriais apresentarem estrutura suave, eles admitem, assim, conexão linear. Para além da banalidade dessa afirmação, podemos nos

[3] É comum na literatura, também, referir-se a essa conexão como conexão riemanniana em M^n com respeito à g.

atentar aos fibrados tensoriais e, dessa forma, notar a existência, assim como a unicidade, de uma conexão específica nesses espaços, essa, que se relaciona naturalmente com conexão dada em TM^n.

Lema 2.1. [8] *Seja ∇ conexão linear em M^n. Existe uma única conexão em cada $T^k_l M^n$, também denotada por ∇, que satisfaz:*

1. *Em TM^n, ∇ concorda com a conexão dada;*
2. *Em $T^0 M^n$, ∇ é dada pela diferenciação ordinária de funções: $\nabla_X f = Xf$;*
3. *∇ obedece a regra de Leibniz para o produto tensorial:*

$$\nabla_X(F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G);$$

4. *∇ comuta com todas as contrações: $\nabla_X(\text{tr}\, Y) = \text{tr}(\nabla_X Y)$.*

Esse lema, além de nos dar um vínculo entre derivadas covariantes em $T^k_l M^n$ e em M^n, fornece-nos uma maneira de calcularmos, em termos de conexões, o quadrado do módulo de um tensor. Se F é um tensor de *rank* arbitrário que age nos espaços tangente de uma variedade riemanniana (M^n, g), então $|F|^2 := g(F,F) = \nabla^i F \nabla_i F$.

Outrossim, apresentemos, agora, os chamados "mapas musicais". Considere, então, o isomorfismo de TM^n para T^*M^n que transforma $X \in TM^n$ na 1-forma $X^\flat \in T^*M^n$ dada por $X^\flat(Y) := g(X,Y)\ \forall\ Y \in TM^n$.[8] Geralmente, esse mapa é chamado de bemol, cujo inverso $\omega \mapsto \omega^\sharp$ é nomeado de mapa sustenido.[8] Por meio dessas funções, podemos definir o traço de um tensor 2-covariante simétrico F com respeito a uma métrica riemanniana g como $\text{tr}_g F := \text{tr}\ F^\sharp$, o que nos conduz a concluir que $\text{tr}_g g = \dim(M^n)$.[8] Esses isomorfismos musicais não possuem uma aplicação restrita à definição de tr_g, mas permitem que realizemos diversas construções. Fazendo uso deles e de (2.1), podemos definir, por exemplo, o divergente de um tensor, definição essa que se encontra abaixo.

Definição 2.4. [10] *Seja T um $\binom{k}{l}$-tensor. Definimos o divergente de T como o $\binom{k-1}{l}$-tensor dado por*

$$div\ T(Y_1, \cdots, Y_{k-1}) := \text{tr}(X \to \sharp(\nabla T)(X, \cdot, Y_1, \cdots, Y_{k-1})). \tag{3}$$

Desse modo, em coordenadas, (3) pode ser escrito como $(div\, T)^{i_1,\cdots,i_k}_{j_1,\cdots,j_{l-1}} = g^{ij}\nabla_i T^{i_1,\cdots,i_k}_{j,j_1,\cdots,j_{l-1}}$.[10]

Ademais, a fim de definirmos o operador laplaciano, estabeleçamos o que é a hessiana de uma função.

Definição 2.5. [10] *Sejam (M^n, g) variedade riemanniana e $f \in C^1(M^n, \mathbb{R})$. A hessiana*[4] $\nabla^2 f$ *de f é o mapa definido por* $\nabla^2 f(X,Y) := \nabla_X(\nabla_Y f) - \nabla_{\nabla_X Y} f \;\forall\; X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$.

Isso posto, passemos ao operador laplaciano de uma função.

Definição 2.6. [10] *Sejam (M^n, g) variedade riemanniana e $f \in C^1(M^n, \mathbb{R})$. O laplaciano Δf de f é o traço da hessiana quando considerada como um endomorfismo, ou seja*[5]*,*

$$\Delta f := \mathit{tr}\big(X \mapsto \sharp(\nabla^2 f(X,\cdot))\big). \tag{4}$$

Assim sendo, podemos expressar Δf em coordenadas locais como $\Delta f = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f$.

Agora, lembrando que este trabalho pauta o estudo do fluxo da curvatura de Ricci em superfícies, faz-se razoável fornecermos os meios técnicos para que essa curvatura seja definida de forma precisa. Vamos, assim, começar abordando o mapa endomorfismo de Riemman.

Definição 2.7. [8] *Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita em M^n. Definimos o mapa endomorfismo de curvatura de Riemann, denotado por R, como a função $R : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \to \mathfrak{X}(M^n)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z \;\forall\; X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n). \tag{5}$$

Em termos de coordenadas locais, esse mapa se escreve como $R = R^l_{ijk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_l$, onde R^l_{ijk} são os coeficientes definidos por $R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R^l_{ijk}\partial_l$.[8]

De forma análoga e utilizando (2.7), podemos definir, também, o tensor de curvatura de Riemann, conforme segue abaixo.

[4] Também é comum referir-se à hessiana de f como $Hess(f)$. A seguir, definiremos o laplaciano de f, que denotaremos por Δf. Alguns livros se referem a ele utilizando a notação $\nabla^2 f$, que atribuímos à hessiana.

[5] Na notação utilizada nesta definição para o laplaciano, está implícito que ele é considerado em relação à métrica g. Usaremos essa notação quando ela não produzir confusão; caso contrário, explicitaremos g, escrevendo Δ_g no lugar de Δ. Além disso, na literatura, por vezes, esse operador é chamado de operador Laplace-Beltrami.

Definição 2.8. *Seja* (M^n, g) *uma variedade riemanniana. Definimos o tensor de curvatura de Riemann como o mapa* $Rm := R^\flat$ *que atua em campos vetoriais em* M^n *como* $Rm(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W)$*,* $\forall\ X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M^n)$*.*[8]

Assim, localmente, esse tensor se escreve como $Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$, onde $R_{ijkl} = g_{lm} R^m_{ijk}$.[8]

Definamos, agora, o tensor de curvatura de Ricci, que nos será fundamental neste trabalho.

Definição 2.9. [8] *Seja* (M^n, g) *uma variedade riemanniana. Definimos o tensor de curvatura de Ricci como o traço do endomorfismo de curvatura de Riemann no primeiro e último índice:* $Ric(X, Y) :=$ *tr*$(Z \mapsto R(Z, X)Y)$*, onde*[6] $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$*.*

Desse modo, $R_{ij} = g^{km} R_{kijm}$ é o tensor de Ricci[7] escrito em componentes.[8]

Como ficará evidente no decorrer deste trabalho, mesmo existindo mais de uma noção de curvatura para uma variedade, elas se relacionam de alguma maneira, uma vez que mensuram aspectos que, nos casos triviais, recaem ao nosso senso empírico. Não é diferente quanto à curvatura escalar, que se relaciona naturalmente com a curvatura de Ricci pela sua própria definição.

Definição 2.10. [8] *A curvatura escalar de uma variedade riemanniana* (M^n, g) *é a função* S *definida como* $S :=$ *tr*$_g Ric$*.*

Uma terceira noção de curvatura que apresentaremos é a de curvatura seccional que, além de possuir uma relação direta com a curvatura de Ricci, pode ser entendida via curvatura gaussiana, essa, que é uma propriedade intrínseca de superfícies e que formalizaremos ao tratarmos do fluxo de Ricci em dimensão dois. Assim sendo, façamos tal definição.

Definição 2.11. [8] *Sejam* (M^n, g) *variedade riemanniana,* $p \in M^n$ *e* $\Pi \subset T_pM^n$ *subespaço de* T_pM^n *tal que dim*$(\Pi) = 2$*. Seja, também,* $\{X_p, Y_p\}$ *base para* Π*. A curvatura seccional* $\mathcal{K}(\Pi)$ *de* Π *é definida como*

$$\mathcal{K}(\Pi) := \frac{g(R(X_p, Y_p)X_p, Y_p)}{\|X_p\|^2 \|Y_p\|^2 - g(X_p, Y_p)}. \tag{6}$$

[6] Como Ric depende da métrica riemanniana, podemos considerar $Ric = Ric(g)$, tratando a curvatura de Ricci como uma “curvatura da métrica”.

[7] Por simplicidade, sempre que não houver confusão, referiremo-nos ao tensor de curvatura de Ricci como tensor de Ricci.

A priori, pode parecer que $\mathcal{K}(\Pi)$ é dependente da base escolhida para a calcular, contudo, devido ao denominador de (6), essa definição é independente de base. Além disso, ela, de fato, relaciona-se com a curvatura de Ricci e isso é garantido pelo lema abaixo.

Lema 2.2. [11] *Seja (M^n, g) variedade riemanniana de dimensão n e $X_p \in T_pM^n$ vetor unitário que compõe base ortonormal $\{E_1, \ldots, E_{n-1}, X_p\}$ para T_pM^n. Então $Ric(X_p, X_p)$ é a soma das curvaturas seccionais dos subespaços bidimensionais de T_pM^n gerados sempre por X_p e por outro vetor da base, ou seja, $(X_p, X_p) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{K}(\Pi)\ \forall\ \Pi$ espaço gerado por $\{X_p, E_i\}$.*

Ademais, como as curvas integrais têm uma função significativa no estudo de fluxo geométricos, faz-se necessário que as definamos. Aqui, para nós, uma curva em uma variedade M^n é uma função suave $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$, onde I é intervalo em $\mathbb{R}$. Note que não nos preocupamos se I é aberto ou fechado, tampouco se ele possui ou não bordo. Isso porque, devido à suavidade da função γ, sempre podemos a estender por uma curva em M^n cujo domínio é um aberto contendo I. Além disso, em um paralelo com a cinemática, definimos invariantemente a velocidade $\dot{\gamma}(t)$ de γ em $t \in I$ como $\dot{\gamma}(t) := d\gamma_t(d/dt)$, de maneira que ela atua sobre funções suaves por $\dot{\gamma}(t)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$, $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$.[8] Essa definição auxiliar que demos nos fornece os meios para estabelecermos o que são curvas integrais.

Definição 2.12. [12] *Seja $X \in \mathfrak{X}(M^n)$. A curva $\gamma : I \to M^n$ é dita curva integral de X se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$.[13] Além disso, γ é dita maximal se $\forall\ I_0$ contendo a origem tal que $\widetilde{\gamma} : I_0 \to M^n$ é curva integral de X, temos que $I_0 \subseteq I$.*

As curvas integrais nos levam a definir um subconjunto de certas variedades, chamados de domínios de fluxo, que, como o nome sugere, servirão para que possamos definir fluxo nessas variedades.

Definição 2.13. [12] *Seja M^n uma variedade sem bordo. O aberto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M^n$ é chamado domínio de fluxo se $\forall\ p \in M^n$, o conjunto $\mathcal{D}^{(p)} := \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ é intervalo contendo a origem.*

A hipótese de M^n não possuir bordo provém do fato de que, nessas variedades, para todo $p \in M^n$, existe uma única curva integral maximal com ponto inicial p.[12] Além disso, a definição para domínio de fluxo nos conduz, naturalmente, a definir, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto $M^n_t := \{p \in M^n \mid (t,p) \in \mathcal{D}\}$. Por meio disso, dado $\theta : \mathcal{D} \to M^n$, definirmos as funções $\theta^{(p)} : \mathcal{D}^{(p)} \to M^n$ e $\theta_t : M^n_t \to M^n$ por $\theta^{(p)}(t) = \theta_t(p) = \theta(t,p)$. Essas funções, por mais banais que aparentem, nos são úteis na definição seguinte.

Definição 2.14. [12] *Seja $\mathcal{D}$ domínio de fluxo. Um fluxo em M^n é um mapa contínuo $\theta : \mathcal{D} \to M^n$ tal que $\theta_0 = Id_{M^n}$ e $(\theta_t \circ \theta_s)(p) = \theta_{t+s}(p)$ sempre que ambos os lados estão definidos. Além disso, se θ é função suave, o campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M^n)$ dado por $X(p) = (\theta^{(p)})'(0)$ é chamado de gerador infinitesimal de*[8] *θ.*

Para finalizarmos essa seção, em um paralelo com o cálculo em espaços euclidianos, podemos nos questionar sobre a possibilidade de uma generalização para variedades (sem conexão escolhida previamente) da derivada direcional de um campo na direção de um vetor. Uma vez que T_pM^n geralmente não é homeomorfo a M^n, como é no caso euclidiano, essa possível generalização torna-se razoavelmente mais complexa, porém, possível devido a θ_t.[12] Essa abstração de derivada direcional de campos vetoriais é o que chamamos de derivada de Lie. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$ são campo de vetores em M^n, a derivada de Lie $\mathcal{L}_X Y$ de Y com respeito a X é simplesmente $[X,Y]$.[12] Como tensores covariantes são, efetivamente, vetores, essa generalização é válida para eles também, essa, que é a que iremos, de fato, utilizar mais frequentemente aqui. Para a definir, utilizamos o *pullback* do campo tensorial $\theta_t^* A$ em p, denotado por $d(\theta_t)_p^*$, dado por $d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)})(X_1, \cdots, X_k) = A_{\theta_t(p)}\big(d(\theta_t)_p(X_1), \cdots, d(\theta_t)_p(X_k)\big)$, para $X_1, \cdots, X_k \in T_pM^n$ e A campo k-tensorial covariante.[12]

Definição 2.15. [12] *Sejam A um campo tensorial covariante em M^n e $V \in \mathfrak{X}(M^n)$. Definimos a derivada de Lie $\mathcal{L}_V A$ de A com respeito a V por*

$$(\mathcal{L}_V A)_p = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\theta_t^* A)_p = \lim_{t \to 0} \frac{d(\theta_t)_p^*(A_{\theta_t(p)}) - A_p}{t}, \tag{7}$$

sempre que essa derivada existir.

Logo, com todas as noções e resultados apresentados aqui, podemos prosseguir para o estudo, efetivo, do fluxo de Ricci.

[8] É imediato que a suavidade de X vem da suavidade do fluxo. Além disso, as noções aqui apresentadas sobre fluxo geométrico serão utilizadas implicitamente no decorrer deste trabalho.

3 Fluxo de Ricci

3.1 Apresentação elucidativa do fluxo de Ricci em dimensão finita n

Com os conceitos e resultados básicos de geometria riemanniana apresentados até então, somos capazes de definir o fluxo de Ricci de uma métrica em uma variedade de dimensão finita arbitrária n.

Definição 3.1. [14] *Seja $I \subset \mathbb{R}$ intervalo e considere uma família $g(t)$ de métricas riemannianas a um parâmetro suave $t \in I$ em uma variedade M^n com métrica inicial g_0. Dizemos que $g(t)$ obedece ao fluxo de Ricci se satisfaz o seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g(t) &= -2Ric(g(t)) \\ g(0) &= g_0, \end{aligned} \tag{8}$$

onde $\frac{\partial}{\partial t} g(t)(X_p, Y_p) = \frac{\partial}{\partial t}(g(t)(X_p, Y_p)) \; \forall \, p \in M, \; \forall \, X_p, Y_p \in T_pM$.

Nas exposições elucidativas do fluxo de Ricci, costumeiramente os modelos de curvatura constante são utilizados. Seguindo essa mesma abordagem didática, tomemos como etapa inicial a definição de modelo de geometria para, assim, não recorrermos, puramente, às noções intuitivas sobre o tema.

Definição 3.2. [4] *Um modelo de geometria é uma tupla (M^n, G, G_*), onde M^n é uma variedade simplesmente conexa, G é um grupo de difeomorfismos que atua suavemente e transitivamente em M^n tal que, para cada $p \in M^n$, o grupo de isotropias G_* é isomorfo a G_p.*

Normalmente, quando os modelos de geometria (principalmente os de curvatura constante) são citados, é comum que G e G_* sejam omitidos. Feita essa colocação, estudemos o modelo esférico. Seja, dessa maneira, $\mathbb{S}^n_R$ a esfera n-dimensional de raio R munida da métrica $\mathring{g}_R$ induzida da métrica euclidiana em $\mathbb{R}^{n+1}$. Nesse espaço, o grupo ortogonal $\mathcal{O}(n+1)$ age transitivamente nas bases ortonormais[8] e, como todos os subespaços Π bidimensionais de $T_p\mathbb{S}^n_R$ têm curvatura seccional $\mathcal{K}(\Pi) = \frac{1}{R^2}$ (justificando a nomenclatura "espaço de curvatura constante"), por (2.2), sabemos que $Ric(\mathring{g}) = \frac{n-1}{R^2}\mathring{g}$. Supondo que $\mathring{g} = R^2\overline{g}$, obtemos que $Ric(\mathring{g}) = (n-1)\overline{g}$.[11] Via substituição na equação do fluxo de Ricci, podemos notar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathring{g} = -2Ric(\mathring{g}) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(R^2\overline{g}) = -2(n-1)\overline{g} \Longrightarrow R(t) = \sqrt{R_0^2 - 2(n-1)t},$$

onde R_0 é o raio inicial da esfera.[11]

Perceba que, quando t tende a $\frac{R_0^2}{2(n-1)}$, a esfera tende a colapsar em um ponto, tornando-se singular.[11] A presença de comportamento singular sob evolução da métrica segundo fluxo de Ricci não é exclusivo de $\mathbb{S}_R^n$, como veremos para o caso hiperbólico. Ele não costuma ser apresentado de maneira única, mas como três variedades riemannianas mutuamente isométricas. Aqui, exporemos apenas o modelo do hiperboloide, que é o que mais nos será útil. Assim, seja $(\xi^1, \ldots, \xi^n, \tau)$ sistema de coordenadas ortogonal para $\mathbb{R}^{n+1}$. $(\mathbb{H}_R^n, h_R^1)$ é a folha superior $(\tau > 0)$ do hiperboloide de duas folhas em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido em coordenadas pela equação $\tau^2 - |\xi|^2 = R^2$, com a métrica $h_R^1 = \iota^* m$, onde $\iota : \mathbb{H}_R^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é o mapa inclusão e m é a métrica de Minkowski em $\mathbb{R}^{n+1}$ dada em coordenadas por $m = (d\xi^1)^2 + \cdots + (d\xi^n)^2 - (d\tau)^2$.[8] Em um primeiro instante, pode parecer que h_R^1 não é riemanniana por não atestar a condição de ser positiva definida. Contudo, por meio da projeção estereográfica hiperbólica[9], é possível perceber trivialmente que h_R^1 é, de fato, riemanniana.[8] Além disso, mediante o mapa identidade, é evidente a equivalência conforme global entre as variedades dos modelos hiperbólicos e um subconjunto aberto de um espaço euclidiano. Denotando por $\mathcal{O}(n,1)$ o grupo dos mapas lineares de $\mathbb{R}^{n+1}$ para $\mathbb{R}^{n+1}$ que preservam a métrica de Minkowski, chamado de grupo de Lorentz, o subgrupo $\mathcal{O}_+(n,1)$ dele formado pelos elementos que preservam a folha superior do hiperboloide age transitivamente no conjunto das bases ortonormais em $\mathbb{H}_R^n$.[8] Além disso, procedendo analogamente ao que foi feito para o fluxo de Ricci no caso esférico, obtemos, para o hiperbólico, a solução $R(t) = \sqrt{R_0^2 + 2(n-1)t}$, onde R_0 é o parâmetro inicial constante da equação do hiperboloide.[11] Note que $R(t)$ não é função limitada e que a variedade se expande indefinidamente, o que também é considerado um comportamento singular para o fluxo.

O caso euclidiano, como é de se imaginar, reduz-se a uma banal evolução de uma métrica de curvatura nula, já que, trivialmente por (2.2), $Ric(\overline{g}(0)) = 0$, levando-nos a concluir que $Ric(\overline{g}(t)) = 0 \; \forall \; t \geq 0$. Assim, compilando esse modelo junto ao hiperbólico e ao esférico, podemos interpretar as variedades riemanniana que os constituem, grosso modo,

[9] Para construção da projeção estereográfica hiperbólica, veja "*Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*".[8]

como pontos fixos do fluxo.[11]

Posto isso, atemo-nos ao caso bidimensional, foco deste trabalho.

3.2 Fluxo de Ricci normalizado em dimensão dois

Na seção (2), definimos algumas noções de curvatura para variedades riemannianas e discutimos suas inter-relações. Agora, tratando de superfícies, podemos reaver esses conceitos atendo-nos ao fato de que, em dimensão dois, uma curvatura destaca-se por sua naturalidade com a estrutura do espaço: a curvatura gaussiana, que podemos definir via tensor de curvatura de Riemann como segue abaixo.

Definição 3.3. [8] *Sejam M^2 superfície com métrica g, $p \in M^2$ e $\{X_p, Y_p\}$ base para T_pM^2. A curvatura gaussiana de M^2 em p é definida como*

$$K := \frac{Rm(X_p, Y_p, Y_p, X_p)}{\|X_p\|^2\|Y_p\|^2 - [g(X_p, Y_p)]^2}. \tag{9}$$

A naturalidade da curvatura gaussiana vem do fato dela ser uma propriedade intrínseca da superfície, ou seja, que é preservada por isometria, que é um resultado conhecido como Teorema *Egregium* de Gauss. Ela aparece explicitamente no Teorema de Gauss-Bonnet, um célebre resultado da geometria diferencial em superfícies. Em vista de o enunciar, sendo (M^n, g) variedade riemanniana, definamos uma forma de volume dv_k em M^n como uma k-forma dependente de g e escrita em um sistema de coordenadas positivamente orientado como $dv_k = dv_k(g) = \sqrt{\det(g_{ij})}\, du^1 \wedge \cdots \wedge du^k$.[11] Com isso, somos capazes de apresentar o Teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 3.1 (Teorema de Gauss-Bonnet)**.** [15] *Seja (M^2, g) superfície compacta com métrica riemanniana. Então,*

$$\int_{M^2} K dv_2 = 2\pi\chi(M^2), \tag{10}$$

onde $\chi(M^2)$ é a característica de Euler da superfície.[10]

Repare que, para uma família $g(t)$ de métricas a um parâmetro temporal, a derivada em t de dv_2 deve computar a dependência dessa 2-forma em $g(t)$, o que foi traduzido na

[10] Para melhor entendimento sobre característica de Euler de superfícies compactas, veja "Algebraic Topology: An Introduction."[16]

expressão a seguir:[11]

$$\frac{\partial}{\partial t}dv_2 = \frac{1}{2}\text{tr}_g(-2Ric)dv_2 = -Sdv_2.^{14}$$

Uma vez que a curvatura escalar em uma superfície M^2 se relaciona com a curvatura gaussiana dela por $S = 2K$,[14] verificamos que a variação do $Vol(M^2) = \int_{M^2} dv_2$ de M^2 durante o fluxo de Ricci é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t}Vol(M^2) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{M^2} dv_2 = -\int_{M^2} Sdv_2 = -2\int_{M^2} Kdv_2 = -4\pi\chi(M^2).^{14} \tag{11}$$

Observando a expressão (11), conseguimos perceber que, se $\chi(M^2) > 0$, a variedade irá se contrair a um ponto, enquanto que, se $\chi(M^2) < 0$, ela se expandirá indefinidamente. Não é desejável, por exemplo, que uma superfície se deforme durante o fluxo até se tornar um ponto, uma vez que isso produz um comportamento singular em que o supremo da curvatura não será limitada em uma vizinhança própria compacta dele. Isso foi o que observamos, por exemplo, para o caso do modelo esférico. Para lidarmos com esse inconveniente, vamos definir o que, conceitualmente, chamamos de curvatura escalar média de uma superfície.

Definição 3.4. [14] *Seja (M^n, g) variedade riemanniana compacta de dimensão n. Definimos a curvatura escalar média de M^n como*

$$r := \frac{\int_{M^n} Sdv_n}{Vol(M^n)}. \tag{12}$$

Em particular, para o caso bidimensional,

$$r = \frac{4\pi\chi(M^2)}{Vol(M^2)}. \tag{13}$$

Note que, devido ao Teorema de Gauss-Bonnet, r é determinada pela característica de Euler da variedade, sendo independente da métrica. Por meio da curvatura escalar média, podemos definir o fluxo de Ricci normalizado.

Definição 3.5. [14] *Seja (M^n, g_0) variedade riemanniana compacta de dimensão n e com*

[11] A compreensão deste cálculo pode se fazer melhor ao observarmos a expressão de dv_2 em coordenadas.

métrica inicial g_0. Considere uma família $g(t)$ de métricas riemannianas a um parâmetro temporal. Dizemos que $g(t)$ obedece ao fluxo de Ricci normalizado se satisfaz o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g(t) &= \frac{2r}{n}g(t) - 2Ric(g(t)) \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{14}$$

Perceba, então, que o volume da variedade M^n, nas hipóteses de (3.5), se mantém naturalmente constante nesse novo fluxo. De fato,

$$\frac{\partial}{\partial t}dv_2 = \frac{1}{2}\text{tr}_g(rg - 2Ric)dv_2 = rdv_2 - Sdv_2,$$

o que nos conduz a

$$\frac{\partial}{\partial t}Vol(M^2) = \int_{M^2} rdv_2 - \int_{M^2} Sdv_2 = 4\pi\chi(M^2) - 4\pi\chi(M^2) = 0.$$ [14]

Reduzindo, portanto, o fluxo normalizado ao caso bidimensional, podemos utilizar que $Ric(g) = \frac{1}{2}Sg$[14] para o reescrever em termos da curvatura escalar.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}g(t) &= (r - S)g(t) \\ g(0) &= g_0 \end{aligned} \tag{15}$$

3.3 Sólitons de Ricci e sólitons de Ricci gradiente

Existem soluções do fluxo de Ricci normalizado que se destacam, em certo sentido, em relação às demais. Isso se deve ao fato de, entre outros fatores, elas colaborarem para a demonstração da convergência uniforme da métrica para uma de curvatura constante no caso em que $r > 0$. Nesse contexto, sigamos rumo a definir tais soluções estabelecendo, primeiramente, soluções autossimilares para o fluxo.

Definição 3.6. [4] *Uma solução $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície M^2 é chamado de solução autossimilar do fluxo de Ricci normalizado se existe uma família, a um* *parâmetro, de difeomorfismos conformes $\varphi(t)$ tal que*

$$g(t) = \varphi(t)^* g(0). \tag{16}$$

Posto isso, podemos derivar a expressão (16) em relação ao tempo e usar (7) para, assim, obter $\frac{\partial}{\partial t} g = \mathcal{L}_X g,$ onde $X = X(t)$ é uma família de campos vetoriais gerada[12] por $\varphi(t)$. Substituindo, então, a expressão para a derivada de Lie e utilizando a definição do fluxo de Ricci normalizado, essa equação reduz-se a

$$(r - S) g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i.^4 \tag{17}$$

Se, para alguma função $f(x,t)$, tivermos que $X = -\nabla f$, então (17) se reescreve como $(S - r) g_{ij} = \nabla_i \nabla_j f + \nabla_j \nabla_i f$ ou, equivalentemente,

$$(S - r) g_{ij} = 2 \nabla_i \nabla_j f.^4 \tag{18}$$

Tomando o traço da expressão anterior, obtemos

$$\Delta f = S - r.^4 \tag{19}$$

As manipulações e suposição que fizemos para chegarmos até (19) tendo como relação inicial (16) nos conduzem a nomearmos as soluções das equações deste interregno, contexto no qual são definidos os sólitons de Ricci, esses, que dão nome a esta subseção.

Definição 3.7. [4] *Dizemos que uma métrica $g(t)$ em uma superfície M^2 é um sóliton de Ricci se ela satisfizer a equação (17). Já, se $g(t)$ atestar (18), ela é dita ser um sóliton de Ricci gradiente. Além disso, para qualquer $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado, a solução f de (19) é chamada de potencial da curvatura.*

Dessa forma, perceba que $g(t)$ é um sóliton de Ricci gradiente se o tensor M a seguir

[12] Sendo f função suave em M^2, aqui dizemos que $\varphi(t)$ gera $X(t)$ se

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} f(\varphi(t,x)) = X_x(t)(f) \equiv X(t)(f),\ x \in M^2.^{17}$$

é identicamente nulo para f potencial de curvatura associado a essa família de métricas;[13]

$$M := \nabla\nabla f - \frac{1}{2}\Delta f \cdot g.^{4} \tag{20}$$

Os sólitons de Ricci, como é esperado, não são definidos restritivamente à dimensão dois, mas são passíveis de generalização a dimensões maiores. Suponha que (M^n, g_0) seja uma variedade riemanniana fixa tal que a identidade abaixo se verifica para alguma constante λ e para algum campo de vetores completo[14] X em M^n. Então, g_0 é chamado de sóliton de Ricci;

$$-2Ric(g_0) = \mathcal{L}_X g_0 + 2\lambda g_0.^{4} \tag{21}$$

Dessa forma, podemos obter que $r = -n\lambda$ e, se $\lambda > 0,\ \lambda = 0$ ou $\lambda < 0$, teremos sólitons em contração, estacionários ou em expansão, respectivamente.[4] Chamemos, então, de métrica de Einstein qualquer métrica g tal que o tensor de curvatura de Ricci é um múltiplo dela em cada ponto, ou seja, tal que $Ric(g) = \alpha g$ para alguma função $\alpha : M^n \to \mathbb{R}$.[8] Desse modo, ao observarmos (21), podemos notar que, se o termo da derivada de Lie de g_0 desaparecesse, teríamos uma métrica desse tipo. Métricas de Einstein possuem diversos empregos em geometria riemanniana e para além dela, como, por exemplo, na teoria da relatividade. A proposição que segue exemplifica a aplicação desse tipo de métrica, sendo uma das bases da explicação que daremos no desfecho da subseção (3.6).

Proposição 3.1. [4] *Qualquer solução autossimilar em expansão ou estacionária do fluxo de Ricci em uma variedade compacta é de Einstein.*

Apresentados, assim, os sólitons de Ricci, veremos, a seguir, sua pertinência para estimar limites para a curvatura escalar de uma variedade riemanniana compacta com a métrica evoluindo segundo a equação do fluxo de Ricci.

[13] M não deve ser confundida com a notação utilizada para variedades, em que indicamos a dimensão dela no seu superíndice com o intuito de não produzir notação ambígua.

[14] Um campo de vetores em uma variedade é dito ser completo se cada uma de suas curvas integrais maximais está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.[13]

3.4 Estimativas para a curvatura escalar

Dentre as ferramentas que utilizaremos para estudar estimativas para S está o "*princípio do máximo*",[15] que consiste em uma coleção de resultados que constituem parte do conhecimento para estudo de equações diferenciais parciais parabólicas e elípticas. Antes de o enunciar, é conveniente que façamos uma definição auxiliar.

Definição 3.8. [4] *Seja $g(t)$ é uma família de métricas suaves a um parâmetro em uma variedade compacta M^n. Considere, então, a equação diferencial parcial semilinear*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta_{g(t)} v + g(X, \nabla v) + F(v), \tag{22}$$

onde $X(t)$ é uma família de campos vetoriais em M^n a um parâmetro e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função localmente lipschitziana. Dizemos que u é supersolução de (22) se

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq \Delta_{g(t)} u + g(X, \nabla u) + F(u),$$

e que ela é subsolução de (22) se

$$\frac{\partial u}{\partial t} \leq \Delta_{g(t)} u + g(X, \nabla u) + F(u).$$

Passemos, então, para o resultado abaixo, que, em um primeiro momento, chamaremos de "*princípio do máximo fraco para equações escalares*", pois ele se reflete, mais precisamente, como um princípio estimativo escalar para equações do calor com termo de reação não-linear. Contudo, posto seu enunciado, referiremo-nos a ele, por simplicidade, como "*princípio do máximo*".

Teorema 3.2 (Princípio do máximo escalar fraco para equações escalares)**.** [4] *Seja $u : M^n \times [0, T) \to \mathbb{R}$ uma supersolução de classe C^2 para (22) em uma variedade M^n fechada. Suponha que exista $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que $u(x, 0) \geq C_1 \ \forall \ x \in M^n$, e seja φ_1 a solução para a equação diferencial ordinária*

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = F(\varphi_1)$$

[15] Alguns autores, como o Bennett Chow e o Dan Knopf,[4] preferem explicitar o fato de o princípio do máximo não ser um único resultado chamando-o de "*princípios do máximo*".

satisfazendo $\varphi_1(0) = C_1$*. Então,* $u(x,t) \geq \varphi_1(t)$ *para todo* $x \in M^n$ *e para todo* $t \in [0,T)$ *tal que* $\varphi_1(t)$ *existe. Analogamente, suponha que* u *é subsolução para (22) e que exista* $C_2 \in \mathbb{R}$ *tal que* $u(x,0) \leq C_2\ \forall\ x \in M^n$*. Seja* $\varphi_2(t)$ *a solução para o problema a equação diferencial*

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = F(\varphi_2)$$

satisfazendo $\varphi_2(0) = C_2$*. Então,* $u(x,t) \leq \varphi_2(t)$ *para todo* $x \in M^n$ *e para todo* $t \in [0,T)$ *tal que* $\varphi_2(t)$ *existe.*[16]

Assim, passemos a alçada de compreender o comportamento da evolução da curvatura escalar de uma superfície compacta, um vez que sua definição deixa explícito seu vínculo com a métrica, de maneira que esperamos que ela varie conforme o fluxo ocorre. Para tal, partamos do lema abaixo.

Lema 3.1. [4] *Se* $g(t)$ *é uma família de métricas suaves a um parâmetro em uma superfície* M^2 *tal que* $\frac{\partial}{\partial t} g = fg$ *para uma função escalar* f*, então*

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\Delta f - Sf, \tag{23}$$

onde S *é a curvatura escalar de* M^2*.*

Repare que, para o fluxo de Ricci normalizado, basta substituirmos f por $(r - S)$ e, assim, obteremos a equação

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + S(S - r). \tag{24}$$

Essa expressão tem um formato conhecido na literatura, pois é o exemplo do que chamamos de "*equações de reação-difusão*", que recebem esse nome devido aos termos que a constituem e as aplicações de cada um deles: o termo ΔS é chamado de termo de difusão, enquanto $S(S - r)$ fornece a concentração de S.[4] A fim de aplicar o princípio do máximo em (24), estudemos a solução da equação diferencial ordinária (EDO) abaixo, que consiste, essencialmente, em desprezar o termo laplaciano de (24) e considerar uma

[16] Este resultado pode ser apresentado na literatura como "*Quarta versão do princípio do máximo fraco para equações escalares*". Por meio da primeira versão, prova-se a segunda; da segunda, pode-se obter a terceira, que, por sua vez, fornece-nos uma demonstração para a quarta. Para contemplar o encadeamento dessas demonstrações, veja o capítulo 4 de "*The Ricci Flow: An Introduction*".[4]

variável dependente unicamente do tempo, essa, que faz o papel da curvatura escalar como função exclusivamente da variável temporal.

$$\frac{d}{dt}s(t) = s(s-r), \qquad s(0) = s_0, \tag{25}$$

onde s_0 é uma constante. Esse problema de valor inicial tem solução dada por

$$s(t) = \begin{cases} \frac{r}{1-(1-r/s_0)e^{rt}} & \text{se } r \neq 0, s_0 \neq 0 \\ \frac{s_0}{1-s_0 t} & \text{se } r = 0 \\ 0 & \text{se } s_0 = 0. \end{cases}$$[4]

É interessante ressaltar que, quando aplicamos o princípio do máximo a (24), implicitamente usamos que toda função diferenciável de um intervalo para a reta real é localmente lipschitiziana[18] e que funções contínuas entre espaços topológicos preservam compacidade.[19] Estudando, então, as derivadas de $s(t)$, podemos perceber que essa última é uma função monótona não-decrescente quando $s_0 < \min\{r, 0\}$. De fato, para o caso $s_0 = 0$, não há o que mostrar. Já, para $r = 0$, obtemos que $s'(t) = s_0^2/(1-s_0 t)^2 \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Finalmente, se $r \neq 0$ e $s_0 \neq 0$, temos que $s'(t) = \frac{r^2 s_0 (s_0 - r)e^{rt}}{((s_0-r)e^{rx}-s_0)^2}$, de maneira que $s'(t) \geq 0$ se, e somente se, $s_0^2 \geq r s_0$. Dessa forma, se $r < 0$, então $s_0 < r$ ou, equivalentemente, $s_0^2 > r s_0$. Por outro lado, se $r > 0$, temos que $s_0 < 0$, o que implica que $r s_0 < 0 < s_0^2$ e, assim, completa a demonstração. Isso nos fornece, via princípio do máximo, um limite inferior para S quando $S_{\min}(0) := \inf_{x \in M^2} S(x, 0) < \min\{r, 0\}$:

$$S(x,t) - r \geq S_{\min}(0) - r \; \forall \; x \in M^2, t > 0.$$[4]

O limite superior, contudo, não pode ser obtido dessa mesma forma. Isso porque, para $s_0 > \max\{r, 0\}$, existe um tempo finito T, expresso abaixo, tal que $\lim_{t\to T} s(t) = \infty$:

$$T = \begin{cases} -\frac{1}{r}\log(1 - r/s_0) > 0 & \text{se } r \neq 0 \\ \frac{1}{s_0} & \text{se } r = 0. \end{cases}$$[4]

Desse modo, motivados por essa discussão e partindo dessa análise, vamos enunciar o lema abaixo, que resulta da aplicação do princípio do máximo a (24) junto a manipulações algébricas simples.

Lema 3.2. [4] *Seja $g(t)$ solução completa com curvatura limitada do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície compacta.*

- *Se $r < 0$, então*

$$S - r \geq \frac{r}{1 - \left(1 - \frac{r}{S_{\min}(0)}\right)e^{rt}} - r \geq (S_{\min}(0) - r)e^{rt}.$$

- *Se $r = 0$, então*

$$S \geq \frac{S_{\min}(0)}{1 - S_{\min}(0)t} > -\frac{1}{t}.$$

- *Se $r > 0$ e $S_{\min}(0) < 0$, então*

$$S \geq \frac{r}{1 - \left(1 - \frac{r}{S_{\min}(0)}\right)e^{rt}} \geq S_{\min}(0)e^{-rt}.$$

Ainda que essa abordagem não nos forneça limites superiores e inferiores para S, ele pode ser aperfeiçoado fazendo o uso dos já apresentados sólitons de Ricci. Para tal, vamos partir da proposição abaixo.

Proposição 3.2. [4] *Em uma solução $(M^2, g(t))$ do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície compacta, a quantidade $H := S - r - |\nabla f|^2$ evolui no tempo segundo a equação*

$$\frac{\partial}{\partial t}H = \Delta H - 2|M|^2 + rH, \tag{26}$$

onde $f = f(x,t)$ é potencial de curvatura de $(M^2, g(t))$ a menos de uma função temporal e M é o tensor definido em (20).[17]

Assim, da compacidade de M^2 e da continuidade de rH, sabemos que existe $C > 0$ tal que, para cada $t > 0$ e para todo $x \in M^2$, $rH \leq C$. Além disso, em vista de aplicarmos o

[17] A demonstração desse fato consiste em evoluir, separadamente, $S - r$ e $|\nabla f|^2$ e usar que $\frac{\partial}{\partial t}f = \Delta f + rf$. A prova dessa proposição desse fato, junto aos resultados auxiliares nos quais esse se baseia, encontram-se em.[4]

princípio do máximo a (26), estudemos, para $\varphi = \varphi(t)$, a EDO

$$\frac{d}{dt}\varphi = r\varphi. \tag{27}$$

A solução dessa equação é $\varphi(t) = Ae^{rt}$, com $A \in \mathbb{R}$. Pelo princípio de superposição para EDOs, sabemos que $\varphi(t) = Ce^{rt}$ também é solução para (27), tendo a característica de que $\varphi(0) = C$. Logo, pelo princípio do máximo, $H \leq Ce^{rt}$. Além disso, note que $S - r \leq S - r + |\nabla f|^2 = H$, o que nos conduz a sequência de desigualdades

$$S - r \leq H \leq Ce^{rt}.$$ [4]

A relação acima é suficiente para nos fornecer um limite superior para S. Unindo-a a (3.2), obtemos a proposição a seguir, que nos fornece limitantes para a curvatura escalar da variedade durante o evolução da métrica.

Proposição 3.3. [4] *Para uma solução* $(M^2, g(t))$ *do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície compacta, existe uma constante* $C > 0$ *dependente somente da métrica inicial tal que:*

- *Se* $r < 0$*, então* $r - Ce^{rt} \leq S \leq r + Ce^{rt}$.
- *Se* $r = 0$*, então* $-\frac{C}{1+Ct} \leq S \leq C$.
- *Se* $r > 0$*, então* $-Ce^{rt} \leq S \leq r + Ce^{rt}$*.*

A importância imediata dessa proposição diz respeito à elucidação da convergência das métricas $g(t)$ evoluindo pelo fluxo de Ricci normalizado para uma métrica suave de curvatura constante em uma superfície fechada. A demonstração efetiva desse fato transpassa certos métodos estimativos e identidades que vão para além do escopo deste trabalho, entretanto, um desses resultados, que daremos destaque aqui devido a razões discutidas adiante, será a chamada identidade de Kazdan-Warner.

3.5 A identidade de Kazdan-Warner

A fim de introduzirmos a identidade de Kazdan-Warner, vamos enunciar o Teorema da Uniformização, um célebre resultado classificatório para superfícies (dentro de certas hipóteses). Geralmente, ele é apresentado utilizando grupos discretos de isometrias, contudo, essa abordagem apresenta complexidade acima da necessária para o que vamos precisar. O teorema que nomearemos como “Teorema da Uniformização” efetivamente é uma junção do Teorema de Killing-Hopf com o Teorema da Uniformização de Riemann.

Teorema 3.3 (Teorema da Uniformização)**.** *[14] Qualquer superfície compacta admite uma, e somente uma, dentre as geometrias de curvatura constante, que consistem nos modelos hiperbólico, euclidiano e esférico.*

Notamos, então, que os modelos de geometria de curvatura constante não foram introduzidos como meros exemplos ao apresentarmos o fluxo de Ricci, mas são recorrentes ao tratarmos de variedades bidimensionais. Ainda, o teorema anterior tem, como implicação, o fato de toda superfície admitir uma única métrica conforme de curvatura constante. Dando enfoque, assim, ao modelo esférico, indicaremos por um círculo sobrescrito nas grandezas aquelas referentes à métrica $\mathring{g}$ na esfera $\mathbb{S}^2$. Sendo, então, φ um harmônico esférico, que consiste em uma autofunção do laplaciano $\mathring{\Delta}$, por (3.3), podemos escrever uma métrica arbitrária g em $\mathbb{S}^2$ como $g = e^{2u}\mathring{g}$.[4] Nesse contexto, a identidade de Kazdan-Warner consiste na relação integral abaixo entre a curvatura gaussiana K de g e a derivada do harmônico esférico definida em relação à $\mathring{g}$:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathring{\nabla}\varphi(K)e^{2u}d\mathring{A} = 0.^4 \tag{28}$$

A identidade acima, convenientemente, pode ser estendida para campos de Killing.[18] Assim, se Y é um campo de Killing em relação à $\mathring{g}$, então

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mathring{\nabla}\varphi(K)e^{2u}d\mathring{A} = 0.^4 \tag{29}$$

Essa extensão deriva da razão da identidade de Kazdan-Warner ser fortemente correlacionada com o espaço dos campos de Killing conformes[19] de $(\mathbb{S}^2, \mathring{g})$. A dimensionalidade seis desse espaço advém das três dimensões provindas dos campos da forma $\mathring{\nabla}\varphi$, para φ harmônico esférico, somadas as outras três que vêm dos campos de Killing para $\mathring{g}$.[4] Dessa

[18] Um campo de vetores X em uma variedade riemanniana (M^n, g) é dito ser de Killing em relação à métrica g se ele satisfaz $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$.[20]

[19] Um campo X é dito ser de Killing conforme se existe função $k : M^n \to \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{L}_X g)_{ij} = kg_{ij}$.[21]

maneira, podemos estender a identidade apresentada como de Kazdan-Warner para campos de Killing conformes X na esfera bidimensional com a métrica $\mathring{g}$:

$$\int_{\mathbb{S}^2} X(K)e^{2u}d\mathring{A} = 0.^{4} \tag{30}$$

Através de integração por partes, somos capazes de mostrar a relação

$$\int_{\mathbb{S}^2} g(X, \nabla K)dA = \int_{\mathbb{S}^2} X(K)dA = 0,^{4} \tag{31}$$

onde $dA = e^{2u}d\mathring{A}$. Essa identidade pode, em um primeiro instante, parecer desconectada do tema deste trabalho, entretanto, é por meio dela que uma futura proposição apresentada é provada, proposição essa de notável importância para o estudo do fluxo de Ricci em dimensão dois, especialmente para a convergência da métrica no caso em que a superfície possui $r > 0$. Sigamos, então, ao estudo dessa convergência.

3.6 Convergência da métrica

Com o intuito de discutirmos a convergência da métrica evoluindo segundo o fluxo de Ricci normalizado, faz-se vantajoso garantirmos a existência da solução desse fluxo para todo tempo, o que advém da proposição a seguir.

Proposição 3.4. [4] *Se (M^2, g_0) é uma superfície fechada, uma única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado satisfaz $g(0) = g_0$ e existe para todo tempo.*[20]

Compilando ela junto aos resultados apresentados para sólitons de Ricci e à identidade de Kazdan-Warner, é possível provar o resultado abaixo.

Proposição 3.5. [4] *Se $(M^2, g(t))$ é solução autossimilar do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície, então $g(t) \equiv g(0)$ é uma métrica de curvatura constante.*[21]

[20] A prova desse fato não é trivial. Ela utiliza ferramentas complexas que fogem ao escopo deste trabalho, tais como estimativas derivadas de Bernstein-Bando-Shi para generalizar o Teorema de Hamilton, esse, que nos fornece a unicidade e existência da solução do fluxo de Ricci para um intervalo positivo $[0, \varepsilon)$. Para conhecer mais, veja "*The Ricci Flow: An Introduction*".[4]

[21] A notação "$\equiv$" representa a conformidade entre as métricas. Ademais, para ver a prova desta proposição, veja "*The Ricci Flow: An Introduction*".[4]

Demonstração. Por (3.1), não há o que provar para $r \leq 0$. Já, para $r > 0$, vamos passar para o recobrimento universal, se necessário, para assumir que M^2 é difeomorfa a uma esfera, o que podemos fazer devido ao Teorema de Gauss-Bonnet. Contraindo (17) por Rg^{-1}, temos que $2S(r-S) = 2Sdiv\ X$. Assim, usando integração por partes,

$$-\int_{\mathbb{S}^2}(S-r)^2 dA = \int_{\mathbb{S}^2} S(r-S)dA = \int_{\mathbb{S}^2} S\ div\ XdA.$$

Segundo (17), X é campo de Killing conforme em $\mathbb{S}^2$. Aplicando, assim, uma vez mais a integração por partes, obtemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2}(S-r)^2 dA = \int_{\mathbb{S}^2} g(\nabla S, X)dA.$$

A última integral é nula pelo identidade de Kazdan-Warner (31). Logo, $S \equiv r$, o que completa a demonstração.[22] □

Essa proposição constitui um dos passos para uma possível prova para o seguinte teorema, que é um dos resultados mais célebres do fluxo de Ricci em superfícies. Sua demonstração não é simplória, especialmente para o caso em que a curvatura escalar média é estritamente positiva. Costumeiramente, a prova dele é feita para cada caso $r < 0,\ r = 0$ e $r > 0$ separadamente.

Teorema 3.4. [4] *Seja (M^2, g_0) superfície fechada com curvatura escalar média $r \leq 0$. Então a única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado com $g(0) = g_0$ converge exponencialmente em qualquer C^k-norma para uma métrica suave de curvatura constante g_∞ quando $t \to \infty$.*

A demonstração desse fato para o caso em que $r \leq 0$ é equivalente a provar a proposição abaixo.

Proposição 3.6. [4] *Seja $(M^2, g(t))$ uma solução do fluxo de Ricci normalizado em uma superfície fechada com $r \leq 0$. Então, para cada inteiro positivo k, existe uma constante $C_k < \infty$ tal que, para todo $t \in [0, \infty)$, $\sup_{x \in M^2} |\nabla^k S(x,t)|^2 \leq C_k h(t)$, onde $h(t) = e^{rt/2}$ se $r < 0$ e $h(t) = 1/(1+t)^{k+2}$ se $r = 0$.*

[22] Aqui, optamos por abandonar a abordagem de evitar as demonstrações pois esse fato, além de ser imprescindível para o estudo da convergência da métrica em dimensão dois, reúne em sua prova diversos resultados que foram apresentados difusamente neste trabalho, mostrando, desse modo, uma forma de como eles se complementam no estudo dessa convergência.

A equivalência entre (3.4) para $r \leq 0$ e (3.6) advém do fato de que, como $|\nabla^k S(x,t)|^2 \geq 0$, se os supremos das derivadas de todas as k ordens da curvatura média tendem a zero conforme $t \to \infty$, então essa curvatura é constante. Note, desse modo, que $\lim_{t\to\infty} e^{rt/2} = 0$ para $r < 0$, assim como $\lim_{t\to\infty} 1/(1+t)^{k+2}$, essa última, que corresponde ao caso em que $r = 0$. A prova para (3.4) torna-se razoavelmente mais complicada quando consideramos que $r > 0$. Os limites para S fornecidos por (3.3) não colaboram, de imediato, para essa demonstração. De fato, enquanto (3.3) deixa evidente a convergência exponencial quando $r < 0$ e, no caso em que $r = 0$, produz limites fixos para S quando $t \to \infty$, temos que, se $r > 0$, o módulo dos limitantes cresce indefinidamente à medida que t aumenta. Assim, a discussão subsequente, em que seguimos de perto a referência,[4] advém da tentativa de lidar com essa complexidade.

Como a curvatura escalar torna-se positiva em todos os pontos para uma métrica evoluindo segundo o fluxo de Ricci normalizado para $r > 0$, focaremos, unicamente, no caso em que $S(\cdot, 0) \geq 0$. Sendo assim, podemos invocar o chamado princípio do máximo forte,[23] que consiste em um resultado de análise que garante que um limite pontual em t pode ser propagado para um limite global em qualquer tempo $t + \varepsilon$, com $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Assim, se $S(\cdot, 0) \geq 0$, então $S_{\min}(t)$ é função estritamente positiva para todo $t > 0$, exceto se a superfície for um toro plano.[4][24] Isso se justifica pelo fato de a única superfície compacta plana ser o toro plano[24] e porque uma variedade riemanniana é plana[25] se, e somente se, ela tem tensor de curvatura nulo.[8] Nesse último caso, basta esperarmos um tempo $\delta > 0$ suficiente ser percorrido tal que, a partir dele, a curvatura escalar torna-se estritamente positiva.[4] Dessa maneira, efetivamente, podemos considerar o início do fluxo em $t = \delta$, identificando esse tempo com $t = 0$. Nesse momento, relembrando (20), o resultado abaixo relativo a essa quantidade nos será útil.

Proposição 3.7. [4] *Em uma solução $(M^2, g(t))$ do fluxo de Ricci normalizado, o quadrado*

[23] Este é um resultado analítico de grande complexidade quando comparado com os demais aqui apresentados. Para ver seu enunciado formal, veja "*The Ricci Flow: Techniques and Applications. Geometric-analytic aspects*".[23]

[24] Considere o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde podemos distinguir uma esfera da outra usando subíndices $i = 1, 2$ para elas. Sejam $p_i \in \mathbb{S}^1_i$ e $g_{\mathbb{T}^2}$ a métrica em $\mathbb{T}^2$ definida por $g_{\mathbb{T}^2}(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = \mathring{g}(X_1, Y_1) + \mathring{g}(X_2, Y_2)$ para $X_i, Y_i \in T_{p_i}\mathbb{S}^1_i$. Então, chamamos de toro plano bidimensional a variedade riemanniana $(\mathbb{T}^2, g_{\mathbb{T}^2})$.[8,22]

[25] Ser plana consiste em ser localmente isométrica ao espaço euclidiano.

da norma do tensor M evolui segundo a equação

$$\frac{\partial}{\partial t}|M|^2 = \Delta|M|^2 - 2|\nabla M|^2 - 2S|M|^2. \tag{32}$$

Perceba que, se M decai razoavelmente rápido conforme o tempo avança, então (3.4) está provado, uma vez que $M = 0$ em um sóliton de Ricci gradiente e, por (3.5), as soluções autossimilares do fluxo de Ricci em superfícies compactas são métricas de curvatura constante.[4] Considerando isso, apliquemos o princípio do máximo à (32), o que nos produz a relação $|M| \leq Ce^{-St}$, para $C \in \mathbb{R}$. Note que, se $\sup_{x \in M^2} S(x,t) \to 0$ quando $t \to \infty$, a exponencial pode ser não-nula. Para lidarmos com essa contrariedade, um dos caminhos é buscarmos uma constante $c \in \mathbb{R}$ independente do tempo tal que $S \geq c > 0$, o que nos conduziria à almejada desigualdade $|M| \leq Ce^{-ct}$. A busca por essa constante passa por considerarmos a equação modificada para o fluxo de Ricci expressa abaixo, cuja solução se difere da solução do fluxo de Ricci normalizado por uma família φ_t de difeomorfismos gerada por vetores dependentes do tempo da forma $\nabla f(t)$ para alguma função $f = f(t)$:[4]

$$\frac{\partial}{\partial t}g = 2M = (r - S)g + \mathcal{L}_{\nabla f}g^4 \tag{33}$$

Assim, via estimativas para as derivadas de M, a solução $g(t)$ do fluxo acima converge exponencialmente em todo C^k para uma métrica g_∞ tal que o M definido para essa métrica, que denotaremos por M_∞, é identicamente nulo, implicando que g_∞ é sóliton de Ricci gradiente. Desse modo, por (3.5), concluímos que g_∞ é métrica de curvatura constante.[4] Em vista de empregarmos os argumentos presentes em (3.6), vamos usar que isso implica na existência de constantes positivas C_k, c_k independentes do tempo para $k \in \mathbb{N}$ tais que a solução de (33) satisfaz $\sup_{x \in M^2} |\nabla^k S(x,t)| \leq C_k e^{-c_k t}$. Como essa estimativa é invariante por difeomorfismos, ela vale para o fluxo de Ricci normalizado original, completando a demonstração. Visivelmente, essa é apenas uma elucidação do processo de prova de (3.4) para o caso em que $r > 0$, seguindo a mesma abordagem e passos presentes em "*The Ricci Flow: An Introduction*".[4] Os detalhes técnicos da prova desse fato exigem ferramentas ainda mais avançadas, como superfícies de entropia e estimativa diferencial Harnack, especialmente para a prova da uniformidade da convergência. As noções completas dessa demonstração podem ser encontrados em.[4] Contudo, a elucidação aqui feita não deve ser descredibilizada. Por meio dela, podemos perceber um fato surpreendente: embora possa parecer que o fluxo de Ricci, com as noções apresentadas aqui, forneça uma prova para o Teorema da Uniformização, sua aplicação para tal feito não passa pelas ideias retratadas diretamente neste trabalho. Ao usarmos (3.5) para assegurarmos a convergência da métrica para uma métrica de curvatura constante, o que estávamos aplicando, implicitamente, era o próprio Teorema da Uniformização, já que ele constitui parte da prova da identidade de Kazdan-Warner, essa, que usamos para demonstrar (3.5) (justificando, assim a escolha por escrevermos a demonstração, especificamente, dessa proposição). Contudo, o fluxo de Ricci é um meio pelo qual o Teorema da Uniformização pode ser provado, o que implica em renunciarmos ao uso da identidade de Kazdan-Warner e seguir para uma análise distinta da que abordamos, conforme pode ser encontrado em "*A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow*".[25]

4 Conclusão

Neste trabalho, estudamos resultados matemáticos relacionados ao fluxo de Ricci em superfícies fechadas. Nesse processo, analisamos o comportamento desse fluxo quando aplicado aos modelos hiperbólico, euclidiano e esférico, compreendendo esses modelos classificatórios (fato que provém do Teorema da Uniformização) como pontos fixos do fluxo. Motivados pelo comportamento singular que surge para esses modelos que têm curvatura constante não-nula, introduzimos o fluxo de Ricci normalizado, através do qual o volume das variedades permanece constante conforme o tempo avança. Sob esse fluxo, estudamos a evolução da curvatura média de uma superfície, aplicando, para tal, o princípio do máximo, o que nos conduziu a concluir que o uso unicamente dele não seria suficiente para obtermos limitantes finitos para a curvatura escalar $S \; \forall \; t < \infty$. A solução para esse inconveniente veio dos sólitons de Ricci gradiente, de maneira que curvatura fica limitada para todo tempo finito:

$$\begin{array}{ll} r - Ce^{rt} \leq S \leq r + Ce^{rt} & \text{se } r < 0 \\ -\frac{C}{1+Ct} \leq S \leq C & \text{se } r = 0 \\ -Ce^{rt} \leq S \leq r + Ce^{rt} & \text{se } r > 0. \end{array}$$

Ademais, como expresso nesses limites para S, a convergência uniforme da métrica para uma de curvatura constante mostra-se mais complexa para o caso em que $r > 0$. Assim, a fim de lidarmos com isso, estabelecemos a identidade de Kazdan-Warner e, utilizando uma vez mais os sólitons de Ricci gradiente, ilustramos os caminhos pelos quais a prova desse fato se dá para esse caso. Desse modo, unindo esse resultado à existência de constantes C_k tais que $\sup_{x \in M^2} |\nabla^k S(x,t)|^2 \leq C_k h(t)$ para uma superfície fechada com $r \geq 0$ e $h(t)$ função tal que $\lim_{t \to \infty} h(t) = 0$, concluímos que a única solução $g(t)$ do fluxo de Ricci normalizado com $g(0) = g_0$ em uma superfície fechada converge exponencialmente em qualquer C^k-norma para uma métrica suave de curvatura constante g_∞ quando $t \to \infty$.

Por fim, concluímos que, por mais que o fluxo de Ricci seja uma maneira de demonstrar o Teorema da Uniformização, o uso da identidade de Kazdan-Warner impossibilita essa prova, induzindo-nos a buscar um caminho alternativo para provar tal teorema, célebre no estudo de variedades bidimensionais.

Referências

1 O'SHEA, **The Poincaré conjecture:** in search of the shape of the universe. [*S.l.*]: Bloomsbury Publishing, 2009.

2 MORGAN, J. W.; TIAN, G. **Ricci flow and the Poincaré conjecture.** [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2007.

3 MILNOR, J. Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. **Notices AMS**, v. 50, n. 248, p. 1226–1233, 2003.

4 CHOW, B.; KNOPF, D. **The Ricci flow:** an introduction. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2004.

5 TIAN, G,.; MORGAN, J. **The Ricci flow and the Poincaré conjectures:** lectures 2. [*S.l.*]: American Mathematical Society, 2007.

6 ANDREWS, B.; HOPPER, C. **The Ricci flow in Riemannian geometry:** a complete proof of the differentiable 1/4-pinching sphere theorem. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2011.

7 TAO, T. **Ricci flow.** Disponível em: https://terrytao.files.wordpress.com/2008/03/ricci1.pdf. Acesso em 20 jun. 2021.

8 LEE, J. M. **Riemannian manifolds:** an introduction to curvature. New York: Springer-Verlag, 1997. (Graduate Texts in Mathematics).

9 SANCHEZ FILHO, E. S. **Tensor calculus for engineers and physicists.** [*S.l.*]: Springer, 2016.

10 VIACLOVSKY, J. A. **Topics in Riemannian geometry:** Math 865. 2007. Disponível em: https://www.math.uci.edu/ jviaclov/courses/865_Fall_2007.pdf. Acesso em: 15 jun. 2021.

11 SHERIDAN, N.; RUBINSTEIN, H. **Hamilton's Ricci flow.** 2006. 97p. Thesis (Honours thesis) - University of Melbourne, Melbourne, 2006.

12 LEE, J. **Introduction to Riemannian manifolds.** 2nd. ed. [*S.l.*]: Springer International Publishing, 2018. (Graduate Texts in Mathematics).

13 LEE, J. **Introduction to smooth manifolds.** 2nd. ed. New York: Springer-Verlag, 2012. (Graduate Texts in Mathematics).

14 BRACKEN, P. An introduction to Ricci flow for two-dimensional manifolds. *In*: BASWELL, A. R. (ed.) **Advances in mathematics research.** New York: Nova Science Publishers, 2017. 37p.

15 O'NEILL, B. **Elementary differential geometry**, 2nd. ed. [*S.l.*]: Elsevier, 2006.

16 MASSEY, W. S. **Algebraic topology:** an introduction. New York: Springer-Verlag, 1977. (Graduate Texts in Mathematics).

17 HITCHIN, N. **Differentiable manifolds:** Course C3. 1b. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~gorodski/teaching/mat5799-2015/hitchin-manifolds2012.pdf. Acesso em: 20 jun. 2021.

18 MIGDALAS, A.; PARDALOS, P. M.; STORøY, S. **Parallel computing in optimization.** [*S.l.*]: Springer US, 2011.

19 GAMELIN, T. W.; GREENE, R. E. **Introduction to topology:** 2nd. ed. [*S.l.*]: Courier Corporation, 2013.

20 TACHIBANA, S. On conformal Killing tensor in a Riemannian space. **Tohoku Mathematical Journal**, Mathematical Institute, v. 21, n. 1, p. 56–64, 1969.

21 SCHOTTENLOHER, M. **A mathematical introduction to conformal field theory.** [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2008.

22 CARMO, M. P. d. **Riemannian geometry.** [*S.l.*]: Birkhäuser Boston, 1992.

23 CHOW, B. *et al*. **The Ricci Flow:** Techniques and Applications. geometric-analytic aspects. [*S.l.*]: American Mathematical Soc., 2010.

24 KAMBER, F.; TONDEUR, P. **Flat manifolds.** Berlin: Springer-Verlag, 1968. (Lecture Notes in Mathematics).

25 CHEN, X.; LU, P.; TIAN, G. A note on uniformization of Riemann surfaces by Ricci flow. **Proceedings of the American Mathematical Society**, JSTOR, v.134, n.11, 3391–3393, 2006.